

Code épreuve

- 030 -

MATHÉMATIQUES

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

-I-

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , noté \mathcal{D}_f .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, puis calculer $f'(x)$ lorsqu'il est défini.
3. Démontrer qu'il existe une fonction polynomiale de degré 3, P , et une fonction rationnelle Q telles que $f'(x) = P(x) \times Q(x)$.
4. Déterminer le signe de $P(x)$, puis en déduire les variations de f .
5. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de \mathcal{D}_f .
6. Démontrer qu'il existe a , b et c trois réels tels que

$$f(x) = ax + \frac{bx + c}{x^2 - 1}$$

En déduire que la droite d'équation $y = ax$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en $\pm\infty$.

7. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f , de la fonction f , en faisant apparaître les éléments de constructions obtenus aux questions précédentes.

Tournez la page S.V.P.

-II-

Dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite Δ d'équation cartésienne :

$$3x + 4y - 6 = 0$$

1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées (x', y') de l'image M' de M par la symétrie orthogonale S d'axe Δ .
2. Déterminer une équation cartésienne de l'image par la symétrie orthogonale S d'axe Δ de la droite D d'équation cartésienne $x - 2y + 2 = 0$.

-III-

On place dans une urne quatre boules numérotées de 0 à 3, indiscernables au toucher. L'expérience consiste à retirer une première boule de l'urne et à regarder son numéro (noté N).

Si $N > 0$, on tire simultanément N autres boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus haut numéro parmi **toutes** les boules tirées depuis le début de l'expérience.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer l'espérance de X et son écart-type.

-IV-

Dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la transformation T définie pour tout point $M(x, y)$ appartenant à \mathcal{P} par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

où $M'(x', y')$ est l'image de $M(x, y)$ par T .

1. Démontrer que T admet un unique point invariant I .
2. Démontrer que pour tout M du plan

$$IM = IT(M)$$

3. Démontrer que T est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
4. Déterminer l'image par T de la droite Δ d'équation $y = \sqrt{3}x$.